LICEO DELLE SCIENZE APPLICATE

A.S 2022/23

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME - 31 MARZO 2023

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}\left(1 + x\, e^{a-x}\right) & per \quad x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{9a}{4(x-1)^4} & per \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a
2. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
3. Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$.
4. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità.
5. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione $g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$ si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$

PROBLEMA 2

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto.

Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe. Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo.

1. Assunto che tale modellizzazione sia descritta dalla funzione

   $$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in [0; 3]$$

   determina i valori dei parametri a, b, c, d in base alle dimensioni definite dall'artigiano.
2. Studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano *Oxy*; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente.

3. Mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

QUESTIONARIO

1) Sia $f(x)=\sin x+\cos x$. Determina $f^{(2023)}(x)$ (ossia la derivata di ordine 2023) esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

2) Considera la funzione: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & se \quad 0 \leq x \leq 3 \\ a + b\sqrt{4-x} & se \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$

con $a, b \in \mathbb{R}$

a) Determina per quali valori dei parametri a e b la seguente funzione permette l'applicazione del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;4]$.

b) Con i parametri trovati è possibile applicare nello stesso intervallo anche il Teorema di Rolle? Perché?

3) Determina un'espressione analitica della retta perpendicolare al piano $2x - 3y + z = 0$ nel punto $[1;1;1]$

4) Per quale valore del parametro k nella funzione $f(x) = \dfrac{kx^2 - 2x}{3x-2}$ si ha $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -2$

Che significato assume tale limite?

5)Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.

a) Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?

b) Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

6) Dimostra, attraverso la definizione, che la derivata di $f(x) = e^{ax}$ è $f'(x) = a\, e^{ax}$

7) Dimostra, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale.

8) Alessia ha a disposizione 20 tipi di frutta (fragole, pesche, limoni, kiwi, …). Vuole preparare due macedonie usando per la prima quattro frutti diversi ma senza il limone e per la seconda cinque frutti diversi, evitando quelli usati nella prima macedonia e senza kiwi. Quante coppie di macedonie può preparare?

LICEO DELLE SCIENZE APPLICATE

A.S 2022/23

SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME L104 - 31 MARZO 2023

Il candidato risolva il problema e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico, schemi e ……..
(O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA

Data la funzione

$$y = f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

1) Individua il dominio di f(x); esistono eventuali asintoti verticali?
2) Analizza eventuali simmetrie rispetto all'origine o all'asse y;
3) Determina le intersezioni con gli assi
4) Studia il segno della funzione;
5) Calcola i limiti agli estremi del dominio; esistono asintoti orizzontali?
6) Ricerca eventuali asintoti obliqui;
7) Calcola la derivata prima e analizza eventuali punti di non derivabilità;
8) Ricerca eventuali punti stazionari;
9) Studia il segno della derivata prima e attribuisci eventuale crescenza o decrescenza alla funzione;
10) Calcola la derivata seconda e ricerca eventuali flessi obliqui;
11) Traccia il grafico della funzione

QUESITI

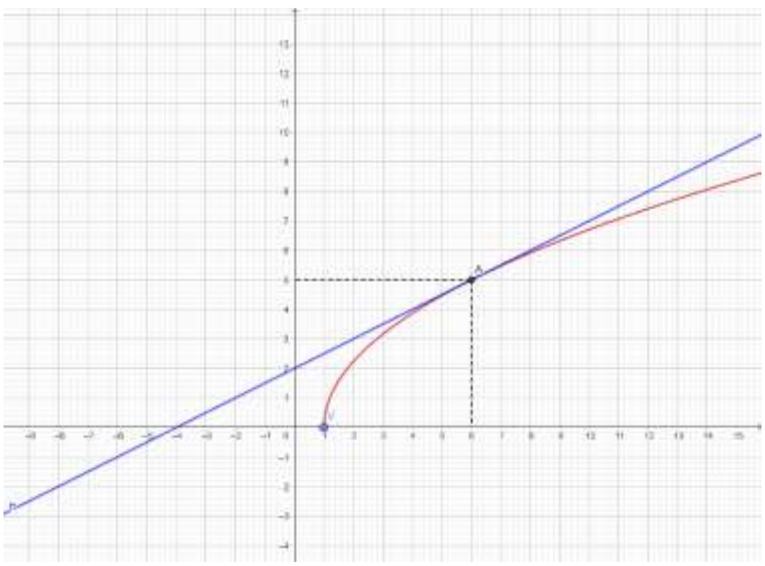
1) Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + sinx}{5x + x^4 cosx}$$

2) Calcola la derivata della seguente funzione: $y = sin^2 x - tan(x^2 - 1)$

3) Dimostrare, senza risolverla, che l'equazione 2 x^3 +3x^2 +6x +12 = 0 ammette una ed una sola soluzione reale.

4) Nel grafico la retta blu è tangente alla funzione rossa f(x) in A.



Utilizzando i dati del grafico:

a) Determina $f'(6)$ (la derivata prima della funzione f(x) in x=6)

b) Supponendo che f(x) rappresenti un arco di parabola di vertice V, trova l'equazione di f(x) e la tangente al grafico nel punto di ascissa 9/4;

c) Nel punto V la funzione è derivabile?

5) Per quale valore del parametro k nella funzione $f(x) = \frac{kx^2 - 2x}{3x-2}$

si ha $\lim_{x \to \infty} f'(x) = -2$

6) Data la seguente funzione, verifica che nell’intervallo [0;1] valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema

$$f(x) = 2e^x + x$$

7) Si effettuano 4 estrazioni con reimmissione da un mazzo di 52 carte. La probabilità di estrarre almeno due assi vale:

☐5,2% ☐3,2% ☐18,2% ☐ -7,2%

8) Un sacchetto contiene 22 palline numerate da 1 a 22. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi un numero multiplo di 3, sapendo che è uscito un numero dispari.